

N° D'ORDRE :

60

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE D'INGÉNIEUR-DOCTEUR

PAR

Alexis GUERBILSKY

1^{re} THÈSE. — SUR LA DÉMULTIPLICATION DE FRÉQUENCE.

2^e THÈSE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le

1939 devant la Commission d'examen

MM. E. DARMOIS . . . *Président.*

J. CABANNES . . . }
F. BEDEAU . . . } *Examineurs.*

PARIS

HERMANN ET C^{ie}, ÉDITEURS

6, RUE DE LA SORBONNE, 6

—
1939



Digitized by the Internet Archive
in 2026

N° D'ORDRE :

60

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE D'INGÉNIEUR-DOCTEUR

PAR

Alexis GUERBILSKY

1^{re} THÈSE. — SUR LA DÉMULTIPLICATION DE FRÉQUENCE.

2^e THÈSE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le

1939 devant la Commission d'examen

MM. E. DARMOIS . . . *Président.*

J. CABANNES . . . }
F. BEDEAU . . . } *Examineurs.*

PARIS

HERMANN ET C^{ie}, ÉDITEURS

6, RUE DE LA SORBONNE, 6

—
1939

FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

MM.

Doyen honoraire M. MOLLIARD.
Doyen C. MAURAIN, *Professeur*, Physique du Globe.

<i>Professeurs honoraires...</i>	H. LEBESGUE.	DANGEARD.	H. ABRAHAM.
	Émile PICARD.	LESPIEAU.	Charles FABRY.
	Léon BRILLOUIN.	MARCHIS.	Léon BERTRAND.
	GUILLET.	VESSIOT.	P. WINTREBERT.
	PÉCHARD.	PORTIER.	O. DUROSCQ.
	FREUNDLER.	MOLLIARD.	BOHN.
	AUGER.	LAPICQUE.	E. RABAUD.
	G. BERTRAND.		

PROFESSEURS

M. CAULLERY.....	T	Zoologie (Évolution des êtres organisés).	FOCH.....	Mécanique expérimentale des fluides.
Émile BOREL.....	T	Calcul des probabilités et Physique mathématique.	PAUTHENIER.....	Physique (P. C. B.).
Jean PERRIN.....	T	Chimie physique.	De BROGLIE.....	T Théories physiques.
E. CARTAN.....	T	Géométrie supérieure.	CHRÉTIEN.....	Optique appliquée.
A. COTTON.....	T	Recherches physiques.	P. JOB.....	Chimie générale.
J. DRACH.....	T	Analyse supérieure et Algèbre supérieure.	LABROUSTE.....	Physique du Globe.
Charles PÉREZ.....	T	Zoologie.	PRENANT.....	T Anatomie et histologie comparées.
M. GUICHARD.....	T	Analyses et mesures chimiques.	VILLEY.....	Mécanique physique et expérimentale.
Paul MONTEL.....	T	Théorie des fonctions et Théorie des transformations.	COMBES.....	T Physiologie végétale.
L. BLARINGHEM...	T	Botanique.	GARNIER.....	T Mathématiques génér.
G. JULIA.....	T	Mécanique analytique et mécan. céleste.	PÉRÈS.....	Mécanique théorique des fluides.
C. MAUGUIN.....	T	Minéralogie.	HACKSPILL.....	T Chimie minérale.
A. MICHEL-LÉVY...	T	Pétrographie.	LAUGIER.....	T Physiologie générale.
N.....	T	Mécanique expérimentale des fluides.	TOUSSAINT.....	Technique Aéronaut.
A. DENJOY.....	T	Application de l'analyse à la Géométrie.	M. CURIE.....	Physique (P. C. B.).
L. LUTAUD.....	T	Géographie physique et géologie dynamique.	G. RIBAUD.....	T Hautes températures
Eugène BLOCH.....	T	Physique	CHAZY.....	T Mécanique rationnelle.
G. BRUHAT.....	T	Physique théorique et physique céleste.	GAULT.....	Chimie (P. C. B.).
E. DARMOIS.....	T	Enseignement de Physique.	CROZE.....	Recherches physiques
A. DEBIERNE.....	T	Physique générale et radioactivité.	DUPONT.....	T Théories chimiques.
A. DUFOUR.....	T	Physique (P. C. B.).	LANQUINE.....	T Géologie structurale et Géologie appliquée.
L. DUNOYER.....	T	Optique appliquée.	VALIRON.....	Mathématiques génér.
A. GUILLIERMOND..	T	Botanique.	BARRABÉ.....	Géologie structurale et géologie appliquée.
M. JAVILLIER.....	T	Chimie biologique.	MILLOT.....	Biologie animale (P. C. B.).
ROBERT-LÉVY.....	T	Physiologie comparée.	F. PERRIN.....	Théories physiques.
F. PICARD.....	T	Zoologie (Évolution des êtres organisés).	VAVON.....	Chimie organique.
Henri VILLAT.....	T	Mécanique des fluides et applications.	G. DARMOIS.....	Calcul des probabilités et Physique-Mathématique.
Ch. JACOB.....	T	Géologie.	CHATTON.....	T Biologie maritime.
P. PASCAL.....	T	Chimie générale.	AUBEL.....	Chimie biologique.
M. FRÉCHET.....	T	Calcul différentiel et calcul intégral.	Jacques BOURCART..	Géographie physique et Géologie dynamique.
E. ESCLANGON.....	T	Astronomie.	M ^{me} JOLIO-CURIE..	Physique générale et Radioactivité.
M ^{me} RAMART-LUCAS	T	Chimie organique.	PLANTEFOL.....	Biologie végétale (P. C. B.).
H. BÉGHIN.....	T	Mécanique physique et expérimentale.	CABANNES.....	Enseignement de Physique.
			GRASSÉ.....	Biologie animale (P. C. B.).
			PRÉVOST.....	Chimie (P. C. B.).
			BOULIGAND.....	Mathématiques.
			CHAUDRON.....	Chimie (P. C. B.).

Secrétaire A. PACAUD.
Secrétaire honoraire D. TOMBECK.





INTRODUCTION

C'EST dans un but d'applications techniques que nous avons été amenés à imaginer un dispositif de production des sous-multiples d'une fréquence

Il s'agissait pour nous d'obtenir une tension électrique de fréquence moitié de celle produite par un mètre oscillateur.

En étudiant les conditions d'apparition des termes de fréquence sous-multiple, nous avons été attirés par le caractère tout particulier de cette question et avons cru qu'il ne serait pas sans intérêt de l'examiner plus à fond.

On rencontre souvent dans la nature et constamment dans la technique, surtout celles d'électro-acoustique et d'amplification des courants électriques de basse et de haute fréquence, le phénomène de distorsion non-linéaire.

Cette distorsion non-linéaire correspond à l'apparition d'harmoniques ou, autrement dit, à l'apparition dans le phénomène effet, des termes de fréquences multiples de celle du phénomène cause.

L'apparition d'harmoniques a lieu chaque fois que l'effet n'est pas une fonction linéaire de la cause.

La distorsion non linéaire est, en général, un effet nuisible à combattre. Tout ingénieur s'occupant des oscillations est très familier avec cette distorsion, et la plupart savent même déterminer par habitude l'ordre de l'harmonique prédominante.

Le problème de multiplication de la fréquence est, par conséquent, très facile et se résume d'une part à produire l'harmonique voulue avec l'intensité maximum et, d'autre part, à le filtrer.

Le dispositif de doublage de fréquence comporte généralement un redresseur double, redressant les deux alternances. La caractéristique de ce dispositif est non-linéaire du fait que sa résistance n'est pas la même pour les tensions positive et négative.

En somme, la multiplication de la fréquence se fait d'habitude par l'utilisation des caractéristiques non linéaires de formes déterminées.

Le phénomène de démultiplication de la fréquence est tout différent.

Il ne se rencontre accidentellement que très rarement. La plupart des ingénieurs radioélectriciens ne l'ont jamais rencontré et ne le craignent pas. Lorsqu'on en a besoin, on le remplace par la production d'oscillations entretenues de fréquence sous-multiple voulue qu'on contrôle par la fréquence à démultiplier.

Un des rares cas de démultiplication accidentelle de la fréquence est celui de la production du son rauque ⁽¹⁾ avec les haut-parleurs sans pavillon (à cône mobile).

La raison de la rareté de ce phénomène est qu'il ne se produit que dans des conditions toutes particulières que nous allons étudier dans ce travail.

Si on veut le produire par la forme des caractéristiques, on arrive à la conclusion que la caractéristique de l'ensemble doit avoir plusieurs branches et que le point de fonctionnement passe à chaque période d'une branche à une autre. Ce passage est déterminé par une considération faisant intervenir soit le fait que le point se trouvait à la période précédente sur une branche déterminée — c'est une considération rappelant l'hysteresis —, soit une variable supplémentaire. La variable supplémentaire peut être une dérivée par rapport au temps de la fonction effet.

Dans ce cas, le passage d'une branche de la caractéristique à une autre peut être déterminé par la caractéristique de l'ensemble.

Mentionnons, enfin, la démultiplication de la fréquence par des transformateurs rotatifs.

Dans ce cas, la tension dans l'enroulement secondaire est fonction non seulement de celle dans l'enroulement primaire, mais aussi de la position de l'arbre. L'angle dont a tourné l'arbre est précisément la variable supplémentaire dont nous avons parlé.

Enfin, en terminant ce travail, nous citons encore un exemple classique de démultiplication de fréquence et montrons son analogie sur certains points avec celui du montage à lampes que nous avons imaginé. Cet exemple est celui de la ferro-résonance.

(1) Voir, par exemple, BEDEAU, *Théorie du diffuseur*, A. S. T. Hermann, 1935.

On sait, en effet, qu'on a observé dans certains cas, avec des montages comprenant une bobine à noyau magnétique, l'apparition dans le courant des termes sous-multiples de la fréquence de la tension appliquée. Nous pensons qu'à la lumière de ce que nous exposons dans ce travail, la théorie de ce phénomène peut être développée, du moins qualitativement, sans grande difficulté.

Je tiens à renouveler mes remerciements à M. le Professeur E. DARMOIS, qui a bien voulu nous encourager dans ce travail et accepter de présider le Jury, ainsi qu'à MM. les Professeurs CABANNES et F. BEDEAU, qui ont bien voulu s'intéresser à nos recherches. Je tiens aussi à témoigner ma gratitude à M. O. YADOF, pour son aide et ses encouragements et à M. I. PODLIASKY, pour ses très précieux conseils et critiques.

CONSIDÉRATIONS GÉNÉRALES

La démultiplication de la fréquence est une transformation de la fonction

$$v = A + a \cos \omega t$$

en une autre fonction périodique $f(t)$ de période

$$T_n = n \frac{2\pi}{\omega}$$

A , a et u sont des constantes, n étant un entier représentant l'ordre du sous-multiple à obtenir.

Lorsqu'il s'agit d'un phénomène physique, la fonction $f(t)$ détermine un régime permanent.

Lorsque le phénomène peut s'exprimer, ne serait-ce qu'à son début, par des équations différentielles linéaires, à coefficients constants, le principe de superpositions d'états permet de discriminer deux cas de démultiplication de la fréquence.

Le premier est celui où, au régime permanent, s'ajoute un terme dit transitoire, dépendant des conditions initiales, qui tend vers zéro. Nous dirons, alors, que le système ne comporte pas d'oscillations entretenues.

Dans le deuxième cas, le terme transitoire ne s'amortit pas et contribue au régime permanent. Nous appellerons ce cas : cas d'oscillations entretenues.

Cette classification n'est pas rigoureuse parce que, si le phénomène ne peut pas s'exprimer par des équations linéaires, le principe de superposition d'états n'est plus valable. Le cas général d'oscillations entretenues n'est pas analytiquement résolu et, par conséquent, il paraît être difficile de définir exactement dans quel cas ces oscillations existent.

On ne peut même pas les définir par le fait qu'elles disparaissent lorsqu'on supprime toute action alternative. On connaît, comme

on le verra plus loin, en effet, des systèmes où les oscillations ne peuvent s'entretenir qu'en présence d'une tension alternative de fréquence et d'amplitude appropriées.

Il paraît, néanmoins, qu'on peut affirmer qu'une oscillation entretenue est celle qui ne peut exister que *lorsque les conditions initiales ne sont pas celles d'équilibre*.

Il ne suffit, en effet, pas de dire qu'elles ne naissent que lorsque les conditions initiales sont appropriées.

Considérons en effet (fig. 1) une lame déformable l soumise à une force alternative F agissant en bout de la lame. Si la lame est parfaitement rectiligne et la force F lui est exactement parallèle, la lame ne fléchira pas et aucune oscillation ne pourra exister. Si, par contre, dans son état initial, la lame est fléchie, par exemple sous l'action d'une force constante superposée à F , la lame se déformera alternativement.

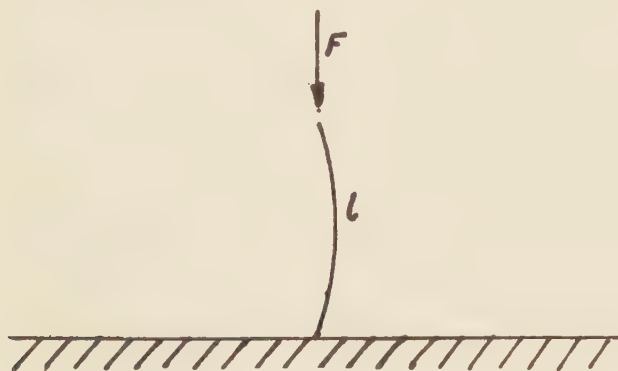


Fig. 1.

Les oscillations, qui ne sont pas auto-entretenues, ne pourront exister qu'à la condition que les conditions initiales soient appropriées.

Ayant ainsi distingué le cas d'oscillations entretenues, on peut mieux définir l'objet de la présente étude.

Les procédés actuels de démultiplication de la fréquence se résument à la synchronisation des oscillations auto-entretenues. Nous proposons un autre procédé, basé sur le fait que si la fonction

$$f(t) = \varphi(\nu)$$

où :

$$\nu = a \cos \omega t + A$$

a plusieurs déterminations et si ces déterminations se permutent à chaque période :

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

$f(t)$ sera périodique de fréquence sous-multiple de celle de ν .

Nous allons discuter le problème de la démultiplication de fréquence sans préciser d'abord la nature physique du phénomène qui peut être aussi bien électrique, acoustique, etc., et, ensuite, nous allons donner l'application d'une méthode qui semble être très différente des méthodes existantes au cas d'une oscillation électrique.

Dans cette application, nous allons considérer la division par deux de la fréquence d'un courant électrique et nous allons aussi indiquer la possibilité de division par d'autres nombres que 2.

Actuellement, lorsqu'il s'agit de démultiplier la fréquence, on recourt soit à des oscillateurs auto-entretenus qu'on synchronise avec la fréquence dont on dispose ou bien, comme on le verra par la suite, on produit des oscillations entretenues qui ne peuvent exister qu'en présence de la tension alternative dont on veut démultiplier la fréquence.

Le caractère général de tous ces systèmes est que l'amplitude du courant à fréquence démultipliée ne dépend sensiblement pas de celle du courant synchronisant. Dans la méthode qui va être décrite, cette amplitude en sera, au contraire, fonction.

LES MÉTHODES CLASSIQUES DE DÉMULTIPLICATION DE FRÉQUENCE

Le cas classique de démultiplication de fréquence en électricité est celui d'un oscillateur auto-entretenu, de fréquence naturelle se rapprochant du sous-multiple à obtenir, synchronisé par la tension alternative dont il s'agit de démultiplier la fréquence. Cette tension s'appelle la tension synchronisante. Les oscillateurs peuvent être de types très variés, mais une des conditions qui leur est imposée et qui se vérifie toujours en pratique est qu'ils soient régis par des équations différentielles non linéaires. En effet, il faut que la tension synchronisante « étouffe » l'oscillation naturelle, donc le principe de superposition d'états ne doit pas être applicable.

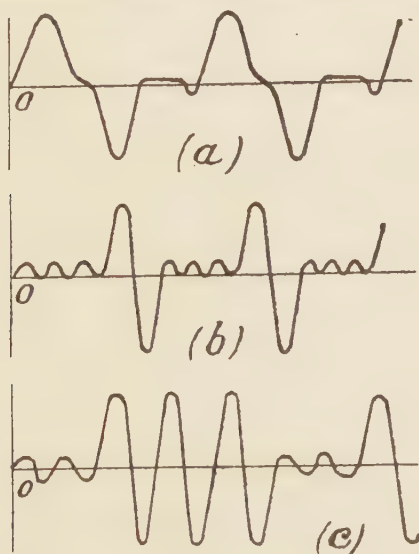


Fig. 2.

Il existe de très nombreux dispositifs à oscillateurs synchronisés, par exemple des oscillateurs à relaxation, à tyratrons, etc.

La figure (2) représente la tension en fonction du temps à la sortie d'un oscillateur à tyratrons synchronisé par la fréquence double de celle qu'on voit sur la figure.

La synchronisation des oscillateurs a été très étudiée et, malgré qu'on ne possède pas de solution analytique pour le cas le plus général, beaucoup de cas particuliers sont résolus analytiquement ou graphiquement, notamment par Van der Pol ⁽¹⁾, LIÉNARD ⁽²⁾, LE CORBEILLER ⁽³⁾, ROCARD ⁽⁴⁾, etc. M. ROCARD a récemment ⁽⁴⁾, examiné de façon assez détaillée les domaines où la synchronisation peut avoir lieu.

Citons encore les travaux de KRILOFF et BOGOLUBOFF ⁽⁵⁾ sur les équations non linéaires en radioélectricité.

On peut mentionner encore un autre type de synchronisation ⁽⁶⁾ différent des autres, où l'oscillation ne peut exister qu'en présence de la force synchronisante.

Nous allons décrire sommairement l'un de ces dispositifs, parce qu'il a ceci de commun avec la méthode que nous avons étudiée que lorsque l'on supprime la force synchronisante, toute oscillation cesse.

Considérons, figure 3 :

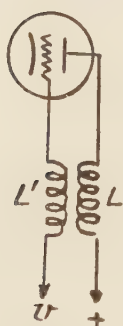


Fig. 3.

une lampe triode, à la grille de laquelle on applique la tension de fréquence F à démultiplier ; le circuit-plaque est constitué par une bobine L résonnant à la fréquence $\frac{F}{2}$. Si le circuit oscille, la bobine L étant couplée à la bobine L' faisant partir du circuit-grille, une tension alternative est induite dans ce circuit ; de ce fait, si l'on suppose, *a priori*, qu'il existe dans le circuit une oscillation de fréquence $\frac{F}{2}$, le circuit-grille sera parcouru par deux courants de fréquences F

et $\frac{F}{2}$, et, par suite de la non linéarité de la caractéristique de la lampe, ils donneront naissance dans le circuit-plaque aux différentes fréquences, dont $\frac{F}{2}$. On conçoit, par conséquent, que si les constantes du circuit sont convenablement choisies, cette oscillation préexistante pourra ne pas s'amortir.

En effet, si l'on suppose que la réaction est suffisamment faible pour que les oscillations, en l'absence de la force synchronisante,

⁽¹⁾, ⁽²⁾, ⁽³⁾, ⁽⁴⁾ Voir bibliographie.

⁽⁶⁾ H. STERKY. — *Proc. I. R. E.*, vol. 25, pp. 1153-1173, sept. 1937.

ne prennent pas naissance, le circuit agissant comme un changeur de fréquence, la réaction effective se trouvera très augmentée du fait de l'existence de la force synchronisante puisque les amplitudes du courant induit et du courant à la fréquence F , du fait de la détection, seront multipliées l'une par l'autre.

DÉMULTIPLICATION DE FRÉQUENCE SANS OSCILLATEUR AUTO-ENTRETENU

Considérons de nouveau la fonction de départ :

$$\varphi = A + a \cos \omega t$$

et la fonction transformée :

$$\varphi(\varphi) = f(t)$$

La fonction $f(t)$ est, par définition périodique de période

$$T_n = nT = n \frac{2\pi}{\omega}$$

Si on admet qu'elle est développable en série de FOURRIER, son développement est

$$\begin{aligned} f(t) = & \alpha_0 + \alpha_1 \sin \frac{\omega}{n} t + \alpha_1 \sin 2 \frac{\omega}{n} t + \dots \\ & + \beta_1 \cos \frac{\omega}{n} t + \beta_2 \cos 2 \frac{\omega}{n} t + \dots \end{aligned}$$

Écrivons cette série de la façon suivante :

$$\begin{aligned} f(t) = & \sum_{k=0}^{\infty} a_k \sin \left(k \frac{\omega}{n} t - \psi_k \right) \\ & + \sum_{l=1}^{\infty} b_l \sin (l\omega t - \chi_l) \end{aligned}$$

k et l étant des entiers.

La deuxième série peut s'obtenir physiquement, par exemple, en électricité avec des lampes triodes, par la courbure de la caractéristique de la lampe introduisant des harmoniques.

Quant à la première série, on peut raisonner de différentes façons. On peut, par exemple, dire que, pour obtenir dans la solution un terme de fréquence $\frac{\omega}{2\pi n}$, on n'a qu'à le produire artificiellement en se servant d'oscillateurs auto-entretenus synchronisés.

Un autre raisonnement est le suivant :

La fonction

$$\varphi(\nu)$$

a, en général, n déterminations. En effet, à chaque valeur de ν correspondent n valeurs de $\varphi(\nu)$ parce que, lorsque t varie de $\frac{2\pi}{\omega}$, ν reprend sa valeur primitive, tandis que pour que $\varphi(\nu)$ reprenne sa valeur, il faut, en général, à cause de la première série, que t varie de

$$nT = n \frac{2\pi}{\omega}$$

De plus, les différentes déterminations de $\varphi(\nu)$ se permutent périodiquement, puisque $\varphi(\nu) = f(t)$ est, par définition, bien déterminé, en fonction de t et est périodique de période nT .

On peut, par conséquent, satisfaire physiquement à la condition de démultiplication de la fréquence, en choisissant un système tel que la fonction transformée, soit une fonction de la valeur de la fonction originale, présentant un nombre de déterminations égal à l'ordre du sous-multiple à obtenir, ces déterminations étant permutées successivement à un endroit donné de la période originale.

En mathématique, on connaît de nombreux exemples de telles fonctions. Un des plus simples est :

$$y = \sqrt[n]{z}$$

où z est une variable complexe.

L'origine est un point singulier et la fonction change de détermination chaque fois que la variable décrit une trajectoire autour de ce point.

En effet, si

$$z = \rho l^{\theta i}$$

$$y = \sqrt[n]{\rho} l^{\frac{n}{\theta} i}$$

lorsque θ varie de 2π , y est multiplié par $e^{\frac{2\pi i}{n}}$. Lorsque z décrit continuellement la même trajectoire, au bout de n fois, y reprend sa valeur originale. Ainsi, si z décrit sa trajectoire à la fréquence f , y sera périodique de fréquence $\frac{f}{n}$.

En physique, la succession des déterminations fait entrer en jeu

les dérivées par rapport au temps et, par conséquent, les caractéristiques dynamiques du système.

On peut citer quelques exemples de démultiplication de fréquence où le phénomène peut être suivi dans toutes ses phases sans difficulté, mais dans la plupart des cas et, en particulier dans celui du schéma électrique que nous avons réalisé, l'intégration des équations présente de sérieuses difficultés et, à notre connaissance, ne peut même pas être effectuée. Il est néanmoins possible de suivre le phénomène en détails et d'établir des conditions pour que la démultiplication de la fréquence se fasse.

La méthode que nous avons adoptée est un peu artificielle, mais elle fait intervenir, au lieu de la variable temps qui conduit souvent à des difficultés mathématiques considérables, une autre variable symbolique complexe qui est déterminée par des éléments généralement faciles, en pratique, à calculer, du moins approximativement. De plus, cette variable complexe, si elle ne permet pas toujours de calculer exactement tous les éléments du phénomène, permet au moins de le suivre facilement dans toutes ses phases.

La représentation arbitraire que nous avons adoptée nous paraît être justifiée par la simplification du raisonnement, et surtout qu'on peut citer des exemples illustres où l'on a adopté la même représentation arbitraire. Un de ces exemples est celui de la modulation de phase. Dans ce cas, le vecteur représentant le courant ou la tension dont la phase est modulée se déplace périodiquement, et si l'on s'en tient strictement à la représentation vectorielle telle qu'on l'utilise dans le courant alternatif, ce vecteur perd sa raison d'être. Mais, néanmoins, cette représentation est devenue classique et se justifie, ainsi que nous l'avons fait dans notre cas, par la simplification du raisonnement, qui aide beaucoup à se représenter l'allure du phénomène.

INTRODUCTION DE LA VARIABLE COMPLEXE

Reprenons la fonction originale

$$\varphi = A + a \cos \omega t$$

et celle transformée

$$V = f(t)$$

Nous avons vu que l'élimination du paramètre temps introduit une indétermination.

On peut, néanmoins, le faire disparaître des équations par l'introduction d'une autre variable fonction de t et dépendant des éléments bien connus par les ingénieurs, tels que, suivant le cas, l'inertie, la vitesse, phase, charge d'un condensateur, etc.

Le fait que V doit être exprimé en fonction de φ , en tenant compte de la caractéristique dynamique du système, signifie que ces deux valeurs sont liées par une équation différentielle qu'on peut écrire :

$$V = V\left(\varphi, \frac{dV}{dt}, \dots, \frac{d^n V}{dt^n}\right)$$

Si $\frac{dV}{dt}$ est développable en série de FOURIER à l'intérieur d'une période T , elle pourra s'exprimer, dans cet intervalle, en fonction d'une somme des sinus de période T . De même les autres dérivées pourront s'exprimer en fonction de la même fonction sinusoïdale.

Supposons que, dans chaque petit intervalle de la période, V puisse être représenté avec suffisamment d'approximation comme une fonction linéaire de φ et de

$$\frac{dV}{dt}, \dots, \frac{d^n V}{dt^n}.$$

Ceci n'est possible que si le principe de superposition d'états est applicable.

Pratiquement, on peut l'appliquer si l'intervalle est suffisamment petit.

Alors, V peut être exprimé en fonction d'une expression de forme

$$u = A + a \cos \omega t + F [\sin (\omega t - \varphi), \cos (\omega t - \varphi)]$$

En général, b et c sont variables, mais cette fonction est intéressante parce qu'elle permet d'exprimer à chaque instant V comme une fonction d'un vecteur, somme des vecteurs

$$\vec{u}_1 \quad A + a \cos \omega t$$

et

$$\vec{u}_2 \quad \begin{cases} b \sin (\omega t - \varphi) \\ c \cos (\omega t - \varphi) \end{cases}$$

ou, ce qui revient au même, par la variable complexe correspondante.

L'allure de cette variable est, en général, facile à déterminer, puisque $\vec{u}_1$ est égale à v et $\vec{u}_2$ est déterminé par la vitesse, inertie, etc. et leur phase ou des valeurs analogues lorsqu'il s'agit d'autres domaines de la physique que la mécanique.

De plus, le point singulier de la fonction correspond généralement à un point situé sur l'axe des X . Pour se rendre compte de la détermination que la fonction prendra à la période suivante, il suffit de suivre la composante verticale et de voir si elle s'annule pour passer de l'autre côté de l'axe, avant ou après le point singulier.



Fig. 4.

Si le point représentatif de la variable, figure 4, décrit une trajectoire c entourant le point singulier P , la détermination de la fonction change. Si, au contraire, il décrit la trajectoire telle que c' , la détermination reste la même et la fréquence n'est pas démultipliée. Si le point représentatif passe par le point singulier, la fonction est indéterminée et la fonction transformée est instable.

Imaginons (fig. 5) une boule m se déplaçant dans un plan horizontal et sans frottement à l'intérieur d'un tube c , sous l'action d'une force alternative v parallèle à l'axe des X et d'une force de rappel

parallèle au même axe. Le tube c est symétrique par rapport à cet axe. La variable dont dépend l'ordonnée du point m dépend de la force f , de la force d'inertie suivant l'axe des X et de la vitesse suivant le même axe. Le point singulier est celui où la somme des forces correspond à la position sur l'axe, la boule s'appuyant sur

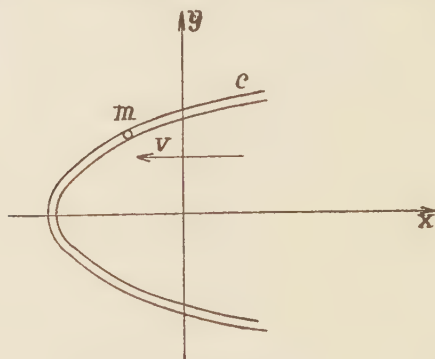


Fig. 5.

la paroi droite du tube, la vitesse à ce moment étant nulle. Pour qu'à la période suivante la boule reste sur la même branche du tube, il faut que la phase de la vitesse s'annule et change de signe

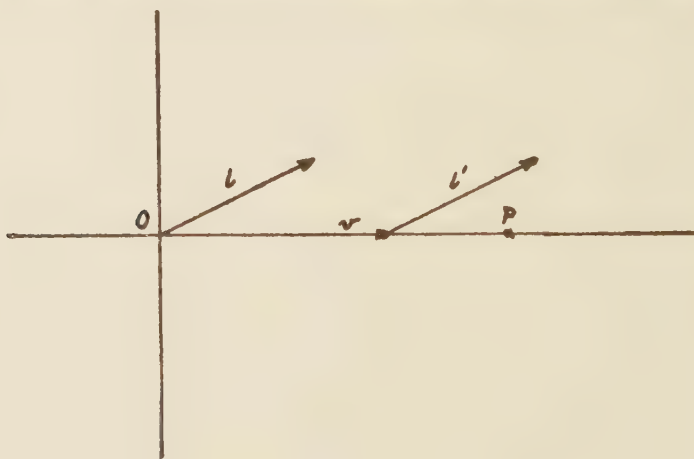


Fig. 6.

avant que la boule atteigne cette position. Si, au contraire, ce changement de phase se fait après, la boule passe à l'autre branche du tube et la fréquence de l'ordonnée est démultipliée.

En effet, pour que le point dépasse la position sur l'axe des X , il faut, pendant que la somme de forces continue encore à augmenter, que la boule passe à l'autre branche et, par conséquent,

la vitesse suivant cet axe change de signe. Or, si cette vitesse avant le passage par l'axe était en avance des phases, ce changement de signe pourra se représenter par une rotation de phase d'un sinusoïde fictif.

Représentons (fig. 6) la force ν par le point m et le vecteur fictif par l . La vitesse sera représentée par la composante verticale de ol , la variable fictive sera représentée par la somme des vecteurs ol et ov . Le vecteur ol tourne autour du point o lorsque le point v se rapproche de p . Lorsque le point l se rapproche du point singulier p , correspondant à la position sur l'axe, la vitesse diminue et le point représentatif q se rapproche de l'axe ox .

Examinons la position à proximité du point p . Lorsque la composante horizontale est égale à op , le point m se trouve sur l'axe en touchant les parois droites. La vitesse garde le même signe, donc le point q est toujours du même côté de l'axe.

La composante horizontale continue à augmenter. Le point m touche la paroi gauche du tube, la vitesse s'annule et change de signe. Le point q , par conséquent, traverse l'axe des X et la composante verticale passe de l'autre côté de l'axe. Par conséquent, tout se passe comme si le vecteur ol continuait à tourner autour du point o , en faisant décrire au point q une trajectoire entourant le point p . Si, au contraire, le point m resterait à la période suivante sur la même branche du tube, ceci entraînerait la condition que la vitesse parallèle à l'axe change de signe avant que le point n'atteigne sa position sur l'axe. Le point q traverserait par conséquent l'axe des X à gauche du point p , sans entourer en conséquence le point singulier, et la détermination de la fonction resterait la même.

Il est bien entendu que cette représentation est très arbitraire et, au point de vue analytique, ne présente pas de grands avantages. Mais elle permet à l'ingénieur de mieux se rendre compte de l'allure du phénomène. Nous avons choisi exprès un exemple très simple, pour illustrer la manière de procéder dans le raisonnement, mais nous allons voir qu'un raisonnement analogue s'applique à des cas qui présentent analytiquement des grandes difficultés.

PRINCIPE DU SCHÉMA EMPLOYÉ POUR LA DÉMULTIPLICATION D'UNE FRÉQUENCE ÉLECTRIQUE

Pour démultiplier la fréquence d'une fonction électrique, nous avons imaginé un schéma se rapprochant beaucoup, par analogie, de l'exemple cinématique qui vient d'être décrit. Sur la figure 7 on voit deux lampes triodes montées en basculeur.

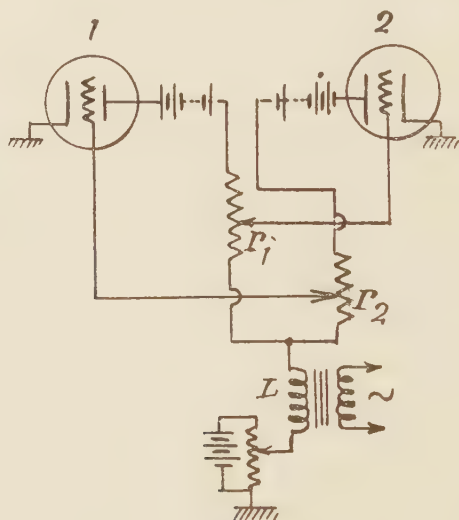


Fig. 7.

Le montage est symétrique par rapport aux deux lampes. La grille de chacune des lampes est connectée à un point du circuit anodique de l'autre, de telle sorte que lorsque le courant dans une des lampes atteint une certaine valeur, par exemple correspondant au commencement de la partie rectiligne de la caractéristique de la lampe, l'autre lampe est bloquée, c'est-à-dire son courant tombe à 0. Les deux grilles sont polarisées par la même batterie e . Donnons à la tension e une valeur correspondant à un courant tel

qu'une des lampes doit être bloquée ; par raison de symétrie, on ne peut pas théoriquement prévoir laquelle des deux lampes va débiter le courant. Évidemment, en pratique, la symétrie n'est jamais parfaite, et ce sera toujours une des lampes qui l'emportera sur l'autre, mais si l'on coupe le circuit anodique, de l'une des lampes, le courant s'établira dans l'autre et, lorsque le circuit anodique sera établi, le courant ne sera pas perturbé et le courant dans l'autre lampe restera 0.

Coupons maintenant le circuit anodique de la lampe qui débite. Son courant tombe à 0, et c'est l'autre lampe qui démarre. En rétablissant le circuit, c'est toujours l'autre lampe qui continuera à débiter. Supposons, maintenant, que le montage est parfaitement symétrique. Lorsqu'on fait varier le potentiel e , le courant commence par diminuer, ensuite, lorsqu'on atteindra la partie courbe de la caractéristique de la lampe, la deuxième lampe commencera à se débloquent et un faible courant s'établira dans les deux lampes. Lorsqu'on continue à diminuer le potentiel e , ce courant tombe à 0. Si l'on diminue le e de façon que le courant dans les deux lampes existe et s'égale et qu'ensuite on commence à faire varier le e de façon que le courant augmente, il est impossible de déterminer laquelle des deux lampes continuera à débiter en bloquant l'autre. Par conséquent, en atteignant le point où le courant s'égale, on a atteint le point singulier de la fonction qui détermine le courant. Par exemple, on peut considérer le courant dans une des lampes comme positif, et dans l'autre comme négatif.

A chaque valeur de e correspondant par la caractéristique de la lampe à un courant assez important, il existe deux déterminations du courant : positif et négatif. Chaque fois qu'on dépassera le point singulier, on introduira une indétermination.

Imaginons maintenant qu'à une tension constante e on superpose par l'intermédiaire du transformateur t une tension alternative

$$a \cos \omega t$$

Si l'on néglige la self du transformateur et les capacités de circuit pour une tension e suffisamment importante pour que la polarisation des grilles passe par le point singulier, le courant dans les lampes est instable et en vérité, en pratique, on peut régler les potentiomètres r_1 et r_2 de façon à observer cette instabilité.

Supposons maintenant qu'il est possible de déterminer les constantes des circuits, de telle sorte que chaque fois que la polarisation des grilles passe par le point singulier, le courant « par inertie » s'établit dans la lampe autre que celle qui débitait auparavant. On pourrait, de cette façon, obtenir qu'à chaque période le courant change de signe ; ainsi, la fréquence est démultipliée.

Pour arriver à ce résultat, il suffit par exemple d'introduire dans le circuit des selfs. Dans le montage que nous avons employé, la seule self introduite dans le circuit est celle du transformateur t . Le potentiel introduit par la tension v dans le circuit-grille est en phase avec la tension aux bornes de ce transformateur. La polarisation introduite par le courant anodique présente, au contraire, un déphasage. La polarisation e est choisie de telle sorte qu'en l'absence de la tension alternative, une des lampes débite un courant, bloquant l'autre lampe.

Supposons alors que la tension alternative a atteint la valeur pour laquelle un faible courant existe dans les deux lampes et qu'elle commence à diminuer. Le courant dans une des lampes commence à s'établir.

Ceci correspond à un courant sinusoïdal, en retard de phase et dont la phase augmente pour, passant par 0, prendre une avance. Si le circuit est suffisamment amorti, c'est-à-dire que la résistance r est grande par rapport à la self $\mathcal{L}$ du transformateur, l'avance de phase prendra, au bout d'une faible fraction de la période, une valeur se rapprochant de sa valeur de régime permanent, qui est facilement calculable par l'expression

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\mathcal{L}\omega - 1}{R}$$

où $R = r + \rho$, ρ étant la résistance interne de la lampe.

Lorsque maintenant la polarisation de la grille de la lampe qui débite, que nous appellerons lampe 1, diminue de façon que le courant qui est en avance de phase prenne une valeur suffisamment faible qu'un courant dans la lampe 2 commence à s'établir suivant la loi classique, les potentiels des grilles vont tendre à s'égaliser. Ensuite, le potentiel de la grille 2 pourra dépasser celui de la grille 1, à condition que l'avance des phases soit suffisamment grande. Si, à ce moment, la polarisation varie en sens inverse de façon que le courant augmente, si le potentiel de la grille 2 continue à rester supérieur à celui de la grille 1, le courant dans la

lampe 2 sera plus grand que celui dans la lampe 1, et c'est la lampe 2 qui bloquera la lampe 1.

Ainsi, à la période suivante, les signes du courant s'inversent et la fréquence est démultipliée.

Représentons (fig. 6) par v la valeur de

$$v = A + a \cos \omega t$$

et par le vecteur ol la tension supplémentaire nécessaire à déterminer le courant de la lampe qui existe effectivement dans celle-ci. Ce vecteur a une valeur supplémentaire dynamique du potentiel dépendant de

$$\mathcal{L} \frac{di}{dt}$$

Cette valeur pourra par conséquent être exprimée par le vecteur ol' dont les composantes horizontale et verticale seront fonction de $\mathcal{L} \frac{di}{dt}$ et de la phase.

L'angle de ce vecteur avec l'axe des X variera par conséquent au cours de la période, son module pouvant varier aussi comme on le verra plus loin.

Au commencement de la période, cet angle commence à diminuer, puisque le déphasage diminue. Il traverse l'axe des X, au moment où le courant correspond à la somme de celui déterminé par la caractéristique statique de la lampe, puis celui dû au potentiel d'inertie en phase.

Ensuite, il passe de l'autre côté de l'axe et correspond à une avance de phase. Lorsque la composante horizontale à la somme des vecteurs est égale à l'abscisse du point singulier p , la composante verticale est au-dessus de l'axe. Puis le courant commence à s'amortir suivant une loi qui, si l'on négligeait la faible tension de polarisation, serait ex-potentielle. Le vecteur ol' , commencera par conséquent à diminuer ainsi que son angle avec l'axe des X.

Lorsqu'il se rapprochera de cet axe, le courant dans la lampe 2 commencera à s'établir en retard de phase, et le cycle de variation de la variable fictive recommence, ayant décrit une trajectoire autour du point singulier, la fonction ayant pris, par conséquent, une autre détermination.

Ce raisonnement permet de prévoir, dans chaque cas, quelles sont les conditions de commutation entre les deux lampes. Puis-

qu'on connaît bien les lois d'établissement et d'amortissement d'un courant dans un circuit bien déterminé, en connaissant la caractéristique de la lampe, on pourra déterminer graphiquement la répartition du courant dans les divers circuits.

On pourra par conséquent, en traçant la courbe qui décrira le courant si la seule caractéristique ait des axes différents, différentes phases du circuit, et si la courbe du courant existant réellement, et en la comparant à la courbe au déphasage constant, sinon construire le vecteur ol , du moins prévoir son orientation déterminer le moment où sa composante verticale s'annule. Ceci permettra, dans chaque cas, de poser les conditions pour que le point représentatif décrive une trajectoire entourant le point singulier et, par conséquent, les conditions pour que la démultiplication de fréquence se fasse.

On voit, par exemple que, d'une part, plus le déphasage est grand, plus il faudra aller loin vers la droite pour que le vecteur, par sa seule rotation, traverse l'axe des X , et qu'en conséquence, plus le déphasage est grand, plus il faudra que l'amplitude de la tension alternative soit grande. D'autre part, plus le déphasage est grand, plus la valeur de ce même vecteur sera grande. Par conséquent, on obtient la condition contraire que l'amplitude de ν pourra être plus petite. En comparant l'allure de la variation du déphasage et de la valeur du vecteur ol , on arrive à la conclusion que si le circuit est composé de résistances et de selfs en série, plus la fréquence sera élevée, plus le déphasage sera grand. Mais la valeur du vecteur augmentera proportionnellement au carré de la fréquence et, par conséquent, plus la fréquence augmente, plus il suffira d'amplitudes faibles pour produire la démultiplication de la fréquence. En effet, la figure 8, représente, avec une polarisation constante, la valeur que doit avoir l'amplitude de ν en fonction de la fréquence. On voit que l'amplitude nécessaire diminue lorsque la fréquence augmente.

D'autre part, plus le vecteur ol augmente, plus vite on se rapproche de la zone où le courant dans les deux lampes s'annule complètement, de façon qu'on tombe dans une zone d'indétermination. Cette zone servira de limitation de l'amplitude de ν . Cette amplitude limite pourra être différente suivant les différentes constantes de circuit, parce qu'ici entrent en facteur le déphasage, la valeur du vecteur ol et l'allure de variation de son

module, qui dépend de la loi d'amortissement et d'établissement des courants dans le circuit. Il ne paraît pas utile de faire les calculs dans un cas particulier, parce que ces calculs sont minutieux et ne représentant aucun intérêt puisque chaque cas est différent.

Indiquons seulement que le procédé revient à décomposer une période en portions et à admettre, dans chaque, des approximations nécessaires pour traiter le problème par des équations différentielles linéaires à coefficients constants.

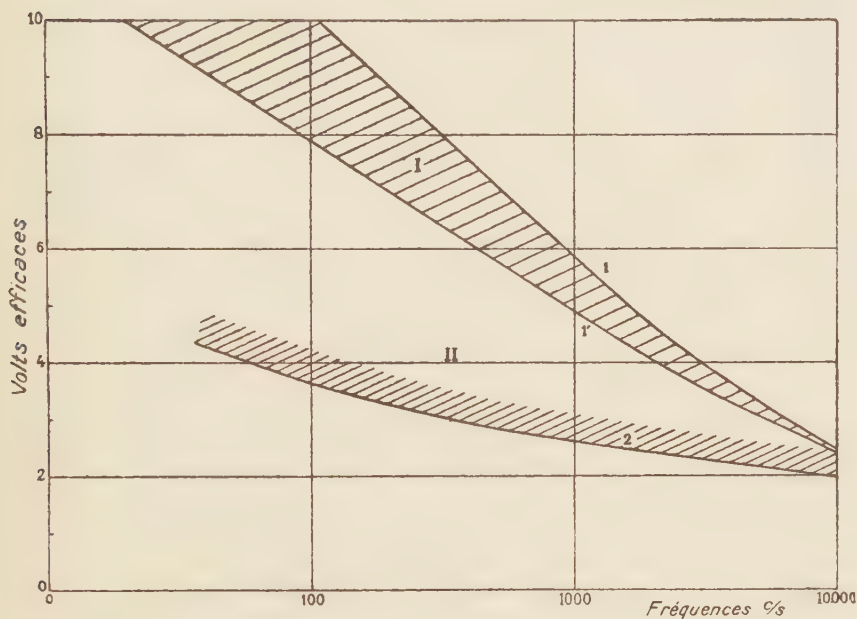


Fig. 8.

On sera obligé d'introduire des constantes qui seront ensuite déterminées de façon que les solutions se raccordent de façon qu'il n'y ait pas de discontinuité dans la courbe pour la période entière.

Considérons l'exemple de la figure 9.

Nous supposons que le circuit est assez amorti pour que, dans la région *kl* de la courbe du courant, le régime soit permanent.

Le courant sera représenté par le terme permanent de la solution de l'équation

$$\mathcal{L} \frac{di}{dt} + (r + \rho)i = E + ka \cos \omega t$$

où ρ est la résistance interne de la lampe et k son coefficient d'amplification.

$$i = \frac{ka}{\sqrt{\mathcal{L}^2\omega^2 + (r + \rho)^2}} (\cos \omega t - \varphi) + C^te$$

$$tg \varphi = \frac{\mathcal{L}\omega}{r + \rho}$$

Le courant est

La partie lm correspond à un point tel que la pente de la caractéristique permet l'existence du courant dans les deux lampes.

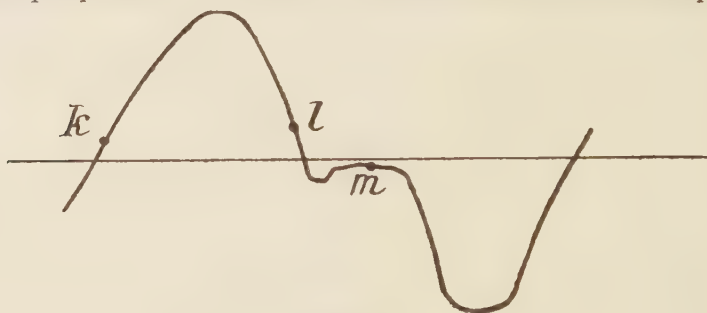


Fig. 9.

Écrivons l'équation statique du système :

$$\rho i_1 = V_a + k v_g - k r_1 i_2$$

$$\rho i_2 = V_a + k v_g - k r_1 i_1$$

Donnons à i_1 une valeur quelconque. Pour que i_2 soit positif, il faut que

$$k r_1 < \rho$$

Cette condition nous détermine $\frac{k}{\rho}$ correspondant au point singulier qu'on déterminera sur la caractéristique des lampes.

La région lm où le courant existe dans les deux lampes peut être divisée en portions où l'on supposera que φ est constant.

Les équations seront :

$$\mathcal{L} \frac{di_1}{dt} + (r + \rho_1) i_1 = E + k_1 (A + a \cos \omega t - r_1 i_2)$$

$$\mathcal{L} \frac{di_2}{dt} + (r + \rho_2) i_2 = E - k_2 (A + a \cos \omega t - r_1 i_1)$$

Éliminons i_2 et $\frac{di_2}{dt}$.

$$i_2 = \frac{E}{k_1 r_1} + \frac{A}{r_1} + \frac{a}{r_1} \cos \omega t - \frac{\mathcal{L}}{k_1 r_1} \frac{di_1}{dt} - \frac{r + \rho_1}{k_1 r_1} i_1$$

$$\frac{di_2}{dt} = -\frac{a\omega}{r_1} \sin \omega t - \frac{\mathcal{L}}{k_1 r_1} \frac{d^2 i_1}{dt^2} - \frac{r + \rho_1}{k_1 r_1} \frac{di_1}{dt}$$

L'équation déterminant i_1 est :

$$\alpha \frac{d^2 i_1}{dt^2} + \beta \frac{di_1}{dt} + \gamma i_1 = c_1 + c_2 \cos \omega t + c_3 \sin \omega t$$

$$\alpha = -\frac{\mathcal{L}^2}{k_1 r_1} \quad c_1 = E + k_2 A - (r + \rho_2) \left(\frac{E}{k_1 r_1} + \frac{A}{r_1} \right)$$

où $\beta = -\frac{\mathcal{L}(2r + \rho_1 + \rho_2)}{k_1 r_1} \quad c_2 = k_2 a - \frac{a(r + \rho_2)}{r_1}$

$$\gamma = k_2 r_1 - \frac{(r + \rho_1)(r + \rho_2)}{k_1 r_1} \quad c_3 = \frac{\mathcal{L} a \omega}{r_1}$$

C'est une équation linéaire à coefficients constants, sa solution est classique et on peut tracer un réseau de courbes en fonction du courant initial.

Ces courbes doivent se raccorder et fournissent

$$i_1, i_2, \frac{di_1}{dt}, \frac{di_2}{dt}.$$

Si l'on veut éviter de tracer les courbes, on déterminera facilement, d'après l'équation, l'allure de variation du vecteur représentatif par la considération de plusieurs points caractéristiques.

Par exemple, après avoir déterminé le point où la tension alternative v est telle que le courant commence à s'établir dans la deuxième lampe, on écrira que ce courant s'établira suivant l'équation ci-dessus et que le courant i , diminue suivant la même équation. On trouvera la condition pour que pour

$$i_1 = i_2 \quad \text{et} \quad \frac{di_2}{dt} > \frac{di_1}{dt}$$

Ceci détermine le signe de la composante verticale du vecteur représentatif au point considéré.

Indiquons quelques résultats expérimentaux :

Sur la figure 8, on a représenté deux courbes limitant de part et d'autre l'amplitude de v . Dans ce cas, la self introduite a été très faible de 0,1 H.

Les valeurs des éléments de circuit étaient les suivantes :

$$r = 5.000, \omega r, = r_2 = 2.500 \omega \text{ (fig. 10)}$$

La partie hachurée entre les deux courbes indique le domaine dans lequel doit se trouver le point déterminé par la fréquence et l'amplitude.

La figure 8₂ représente la courbe de limitation pour une self

plus élevée de 15 H constituée par celle de l'enroulement secondaire d'un transformateur basse fréquence. On voit que l'allure de la courbe est tout à fait différente. A partir d'une certaine tension, l'amplitude peut rester constante pour toutes les fréquences entre 100 périodes et 10.000 périodes.

DISPOSITIF EXPÉRIMENTAL

Le dispositif qui nous a servi pour vérifier le fonctionnement du schéma décrit est représenté sur la figure 10.

Les lampes 1 et 2 sont deux triodes américaines 76. Le chauffage

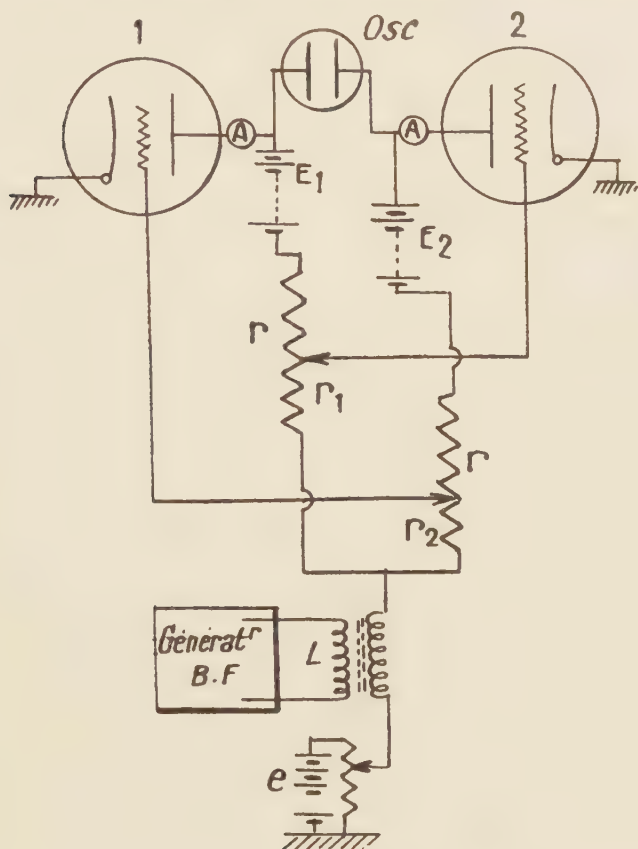


Fig. 10.

du filament n'est pas figuré. Le circuit-grille est constitué par une partie du rhéostat r_1 et r_2 de 5.000ω , du secondaire d'un transformateur t et d'une partie du potentiomètre rh branché aux bornes de la pile e , afin de déterminer la polarisation. Les circuits

anodiques sont complétés par deux batteries E^1 et E^2 . La différence de potentiel entre les deux anodes est mesurée par un oscillographe cathodique dont le balayage est synchronisé par la tension d'entrée débitant sur le primaire du transformateur t et connecté en même temps sur les bornes de synchronisation de l'oscillographe. Cette tension alternative est fournie par un générateur de basse fréquence dont on peut faire varier aussi bien la fréquence que la tension de sortie. De plus, chaque circuit anodique comporte un milliampèremètre.

Pour régler le circuit, on commence par régler approximativement les positions du potentiomètre r_1 r_2 à la même valeur et, ensuite, en observant les courbes sur l'écran de l'oscillographe, on règle la tension alternative à l'entrée et à un des rhéostats, jusqu'à ce qu'on aperçoive la courbe caractérisant le fait que la fréquence est démultipliée.

Au lieu d'observer la courbe, il suffirait d'observer les courants des deux milliampèremètres de circuit anodique. Lorsque la fréquence n'est pas démultipliée, une seule lampe débite. Si les deux milliampèremètres accusent une déviation, ceci prouve que les deux lampes fonctionnent. Comme elles ne peuvent pas fonctionner à la fois, elles le font successivement. Néanmoins, cette observation du milliampèremètre n'est donc pas d'indication si la démultiplication se fait correctement d'une façon stable ou par intermittence, comme c'est le cas lorsqu'en se trouve trop près du point critique.

De plus, si les deux ampèremètres accusent une déviation, les deux lampes fonctionnent successivement, mais on ne sait pas *a priori* s'il s'agit de démultiplication ou de multiplication de fréquence. En effet, le montage étant symétrique pour certaines valeurs de la polarisation de la tension à l'entrée, on peut aussi bien multiplier la fréquence par 2.

L'observation de l'oscillographe ne permet pas de douter sur le caractère du phénomène, puisque, lorsqu'une seule des lampes fonctionne, on commence à observer la courbe telle que celle de la figure 11, (Pl. I).

On la compare facilement à la tension d'entrée et l'on constate que la période est la même ; ensuite, en réglant un des potentiomètres, on voit qu'une alternance sur deux passe au-dessous de l'axe et l'on obtient une courbe telle que celle de la figure 12 (Pl. II).

Ces courbes ont été prises directement en photographiant l'écran de l'oscillographe.

En observant la figure 12, on voit qu'au commencement de la période, le courant monte, puis il redescend en dépassant l'axe horizontal, ce qui s'explique par l'inertie due à la self. Ensuite il remonte très vite, reste d'abord très faible et redescend alors, ce qui est dû au fait que le courant s'établit dans l'autre lampe. La figure 13 (Pl. II) représente le potentiel entre l'anode et la borne inférieure de la résistance r_1 . Par conséquent, elle représente le courant dans une des lampes. Il faut lire la figure de droite à gauche. On voit de nouveau que le courant monte, redescend, dépasse l'axe, remonte au-dessus de l'axe et, au moment où la polarisation devient telle que le courant peut exister dans les deux lampes, il remonte sensiblement au-dessus de l'axe, mais retombe très rapidement à 0, lorsqu'on a atteint le point où la deuxième lampe bloque la première.

La figure 14 (Pl. III) représente la variation du potentiel de la grille d'une des lampes mesurée par rapport à la cathode. La partie droite correspond à la période où la lampe fonctionne, et la partie gauche à celle où elle ne fonctionne pas.

La figure 15 (Pl. III) représente les différences de potentiel entre les deux anodes, lorsque la tension de polarisation constante a été prise assez faible. Dans ce cas, les portions de la courbe où le courant est faible sont très réduites et l'on voit les effets de la distortion par saturation de la lampe. Ces dernières oscillogrammes ont été prises avec un transformateur t de faible impédance secondaire, ce qui facilite l'obtention de courbes de différentes allures. Si l'on adopte un transformateur de grande impédance secondaire, l'obtention de la démultiplication est beaucoup plus facile et beaucoup plus stable, et l'on obtient généralement des courbes telles que celles de la figure 12.

OBTENTION DE SOUS-MULTIPLES D'ORDRE SUPÉRIEUR

La tension recueillie entre deux anodes a été appliquée à un deuxième diviseur de fréquence, et, sans aucune difficulté, on a obtenu une fréquence quatre fois plus faible que celle fournie par le générateur d'entrée. Ainsi, on voit qu'on peut démultiplier la fréquence par cascades par des nombres élevés et en comptant le

nombre d'alternances sur l'écran de l'oscillographe, ou en mesurant la fréquence de sortie, calculer exactement la fréquence à l'entrée.

On peut évidemment obtenir le même résultat par tout diviseur de fréquence et même avec un seul étage de démultiplication, mais, pour déterminer dans ce cas l'ordre du sous-multiple, on doit connaître l'ordre de grandeur de la fréquence à l'entrée. Avec le dispositif que nous avons employé, la fréquence à l'entrée peut varier dans de très grandes proportions, sans que le système cesse de fonctionner correctement. Par conséquent, on peut mesurer et suivre les variations de la fréquence à l'entrée, même si cette fréquence varie beaucoup.

APPLICATION A LA HAUTE FRÉQUENCE

Lorsqu'on veut appliquer la méthode que nous avons employée à la démultiplication des hautes fréquences, on rencontre la difficulté due au fait que les circuits anodiques devant être séparés, comportent chacun une batterie qui présente une capacité à la masse d'autant plus importante que la fréquence est élevée. Cette capacité, multipliée par la résistance des potentiomètres r_1 ou r_2 , donne une constante de temps qui devient trop importante. Il est donc nécessaire de supprimer la batterie.

Pour obtenir ce résultat, nous avons remplacé les lampes triodes par des lampes à grille-écran et, en agissant par la tension alternative sur la grille de contrôle, nous avons produit le blocage de la lampe par la grille-écran. Le montage employé est représenté sur la figure 16.

Le circuit-grille est commun et est constitué par les secondaires du transformateur t et par une partie du potentiomètre rh shuntant la pile e . La source de tension anodique et des grilles-écran est commune. Elle est appliquée à la plaque à travers la résistance r_1 ou r_2 et la grille à travers une partie de cette résistance et une autre résistance en série.

Le fonctionnement du dispositif est analogue à celui des lampes triodes. La mesure de la fréquence de sortie se fait par un fréquencesmètre du type connu, constitué par les lampes 3 et 4, qui chargent et déchargent alternativement le condensateur c . La fréquence est donnée par la valeur du courant dans le milliampèremètre A . Ce

fréquencemètre est attaqué par l'intermédiaire d'un transformateur t' branché entre les anodes des lampes 4 et 5 montées en push-pull, les grilles de ces lampes étant couplées respectivement aux anodes des lampes 1 et 2.

Lorsque la fréquence devient très élevée, la présence des résistances dans le circuit anodique, si l'on tient compte de la capacité interne de la lampe, devient ainsi gênante. Dans ce cas, on remplace les potentiomètres r_1 et r_2 par des circuits accordés, mais très résistants, pour qu'on puisse être sûr que le temps d'établissement du courant dans ces circuits n'est qu'une faible fraction de la période. Le fait que les circuits sont accordés compense en partie la constante de temps.

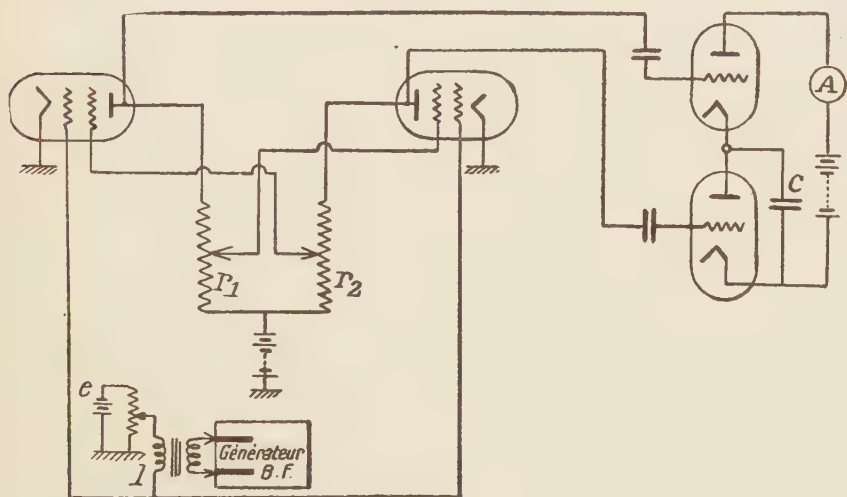


Fig. 16.

L'intérêt d'étendre l'application du dispositif à des fréquences très élevées est le fait que, lorsqu'on construit un émetteur stabilisé et de fréquence variable, l'emploi du quartz est très limité. Nous avons étudié ⁽¹⁾ un type de quartz spécial qui permet de stabiliser un émetteur en laissant néanmoins la possibilité de faire varier sa fréquence. Nous allons décrire ce dispositif très brièvement, parce que, tout en éclairant l'étendue des cas où la démultiplication des fréquences est utile, il sort du domaine du présent travail.

⁽¹⁾ A GUERBILSKY. — *Journal de Physique*, avril 1937.

Ce dispositif est le suivant :

Considérant une lame de quartz résonnant suivant son épaisseur, si cette épaisseur n'est pas uniforme, par exemple figure 17, elle varie le long de sa longueur en diminuant légèrement de gauche à droite pour une fréquence correspondant à la fréquence propre d'un point vers le milieu du cristal. Ce cristal résonnera localement.

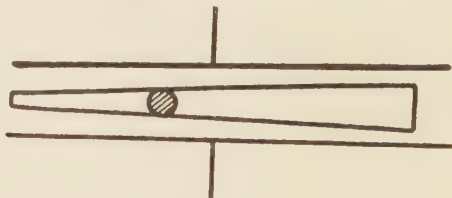


Fig. 17.

Avec un quartz assez long, de quelques centimètres, et d'épaisseur de l'ordre de 1 mm. nous avons constaté, en lumière polarisée, la localisation de la résonnance de l'ordre de 1 mm. Lorsque la fréquence varie et que le cristal est utilisé comme résonnateur, on voit le point lumineux se déplacer en décrivant toute la tranche du cristal d'un bout à l'autre. En disposant un tel quartz entre une plaque faisant armature sur toute sa surface inférieure et une autre armature constituée par une petite barre métallique se déplaçant le long de sa surface, nous avons réalisé des oscillateurs entretenus de fréquence stabilisée et de fréquence pouvant varier de quelques pour cent.

Mais il s'agit souvent de faire varier la fréquence beaucoup plus ; pour cette raison, on recourt de plus en plus à la stabilisation par lignes concentriques de longueur variable.

Comme dans le cas de stabilisation par quartz, on avait souvent besoin de multiplier la fréquence pour que le quartz n'atteigne pas des dimensions trop faibles, dans le cas des lignes concentriques, il est souvent utile de démultiplier la fréquence afin de réduire la longueur des lignes qui deviennent très encombrantes. Il est, bien entendu, possible dans ce cas de recourir à des oscillateurs auto-entretenus à la fréquence sous-multiple synchronisée par la fréquence du mètre oscillateur, mais, lorsque la fréquence varie beaucoup, il est généralement nécessaire de faire varier, en même temps que l'accord du mètre oscillateur, celui du système démultiplicateur. En plus de cet inconvénient, on craint, en em-

ployant des oscillateurs auto-entretenus synchronisés, que la phase ne soit pas assez stable et qu'elle ne présente même pas des sauts de même période. En employant un dispositif tel qu'il a été décrit, le démultiplicateur de fréquence ne possède aucun circuit à accorder et, comme il n'a pas de fréquence propre, la phase ne peut pas varier.

L'inconvénient de ce dispositif est néanmoins le fait que la courbe obtenue est loin d'être sinusoïdale, le pourcentage des harmoniques est très grand et, pour les filtrer, on est quand même obligé de faire usage des circuits accordés. Mais si la fréquence à démultiplier, tout en variant beaucoup, varie de moins de 100%, on peut toujours éliminer les harmoniques en utilisant des filtres passe-bas. Ainsi, en faisant varier la fréquence, on n'est pas obligé de modifier aucun circuit.

MODULATION D'AMPLITUDE

Lorsqu'on emploie des circuits auto-entretenus synchronisés, l'amplitude à la sortie ne dépend pas de l'amplitude à l'entrée. Lorsqu'il s'agit de démultiplier une fréquence modulée en conservant cette modulation, le dispositif décrit peut encore être employé, puisque, la modulation à l'entrée peut être assez profonde et assez fidèlement reproduite à la sortie.

ANALOGIE AVEC LE MONTAGE A FERRO-RÉSONANCE

Plusieurs auteurs ont observé, en travaillant avec des circuits contenant une bobine à noyau de fer, que, dans certaines conditions, le courant contient des termes sou-multiples de la fréquence appliquée ; notamment, M. ROUELLE ⁽¹⁾ a étudié des circuits avec lesquels il a obtenu à l'enclenchement une oscillation de fréquence sous-multiple de celle de la source. Il indique que les résultats obtenus ne sont pas prévisibles par les théories existantes.

Ce phénomène nous paraît ressembler beaucoup à celui que nous avons réalisé nous-mêmes avec des lampes triodes.

Nous avons dit, en effet, que la condition d'apparition des termes sous-multiples est que le système ait plus d'une détermination. Or, déjà, le général FERRIÉ, en manipulant des émetteurs radiotélégraphiques comportant un transformateur à résonance, a observé l'existence de plusieurs régimes permanents. M. BETHENOD a fait une théorie approchée du circuit contenant une bobine à noyau de fer accordé par un condensateur en série, cette théorie donnant une explication de l'existence de plusieurs ré-

gimes. Raisonnant comme si le courant était sinusoïdal, au voisinage de la résonance il néglige les harmoniques et écrit :

$$E = \pm \left(u_s - \frac{I}{c\omega} \right)$$

où E est la force électromotrice appliquée et u_s le potentiel aux bornes de la bobine.

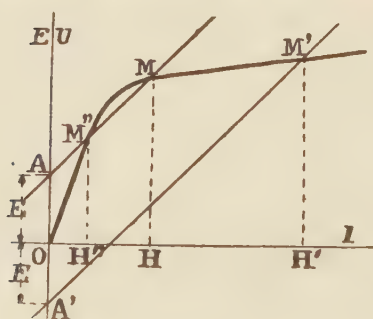


Fig. 18.

Si l'on considère E comme fonction de I, cette équation représente deux droites. En prenant figure 18, la courbe représentant la tension U aux bornes de la

(1) Voir la bibliographie.



Fig. 11.

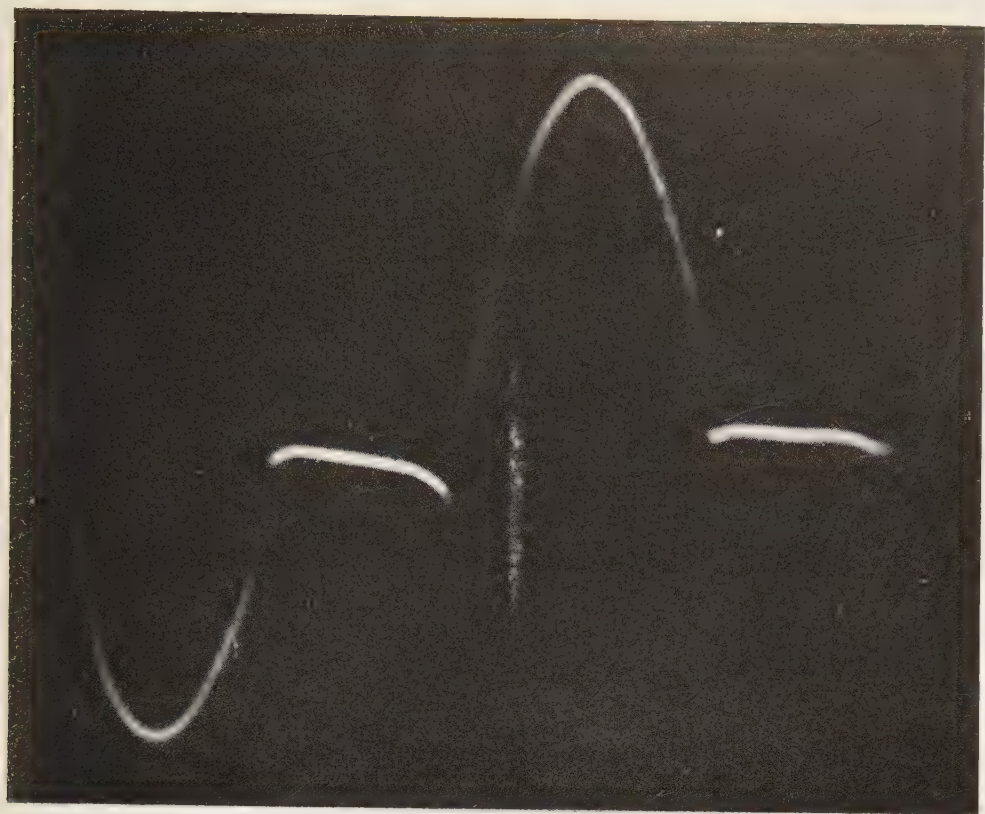


Fig. 12.

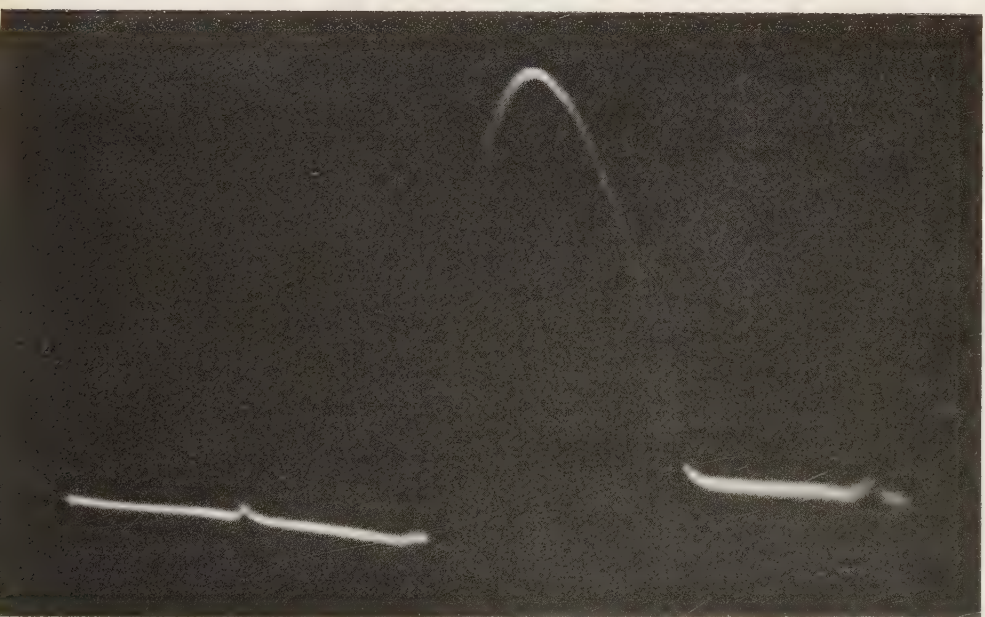


Fig. 13.

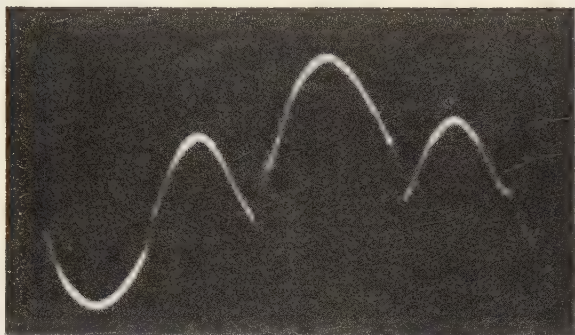


Fig. 14.

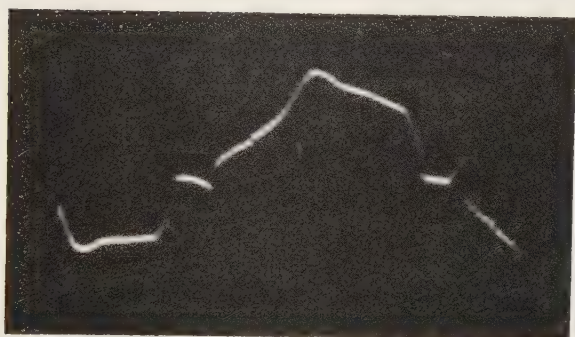


Fig. 15.

bobine en fonction du courant a l'allure de la caractéristique magnétique. Les deux droites coupent cette courbe en trois points M, M', M''. Ces trois points correspondent aux trois régimes possibles.

Nous citerons encore une autre théorie, due à MARTIENSSEN ⁽¹⁾, qui présente pour nous un intérêt particulier. Cette théorie, n'étant elle aussi qu'approchée, est basée sur le raisonnement suivant :

Si l'on écrit l'équation différentielle du système en supposant la self induction constante, on intègre cette équation et, pour les différentes portions de la période, on remplace la perméabilité par sa valeur correspondante à cette portion. Ceci suppose qu'on néglige le régime transitoire dû à la variation de la perméabilité. De plus, ceci suppose qu'on partage la période en petites portions auxquelles on applique les équations différentielles linéaires, c'est-à-dire qu'on admet que le principe de superposition d'états est applicable. Or, c'est exactement la même supposition que nous avons faite dans notre exposé. Les résultats de MARTIENSSEN sont, malgré cette approximation, et d'après M. ROUELLE, en bon accord avec les résultats expérimentaux.

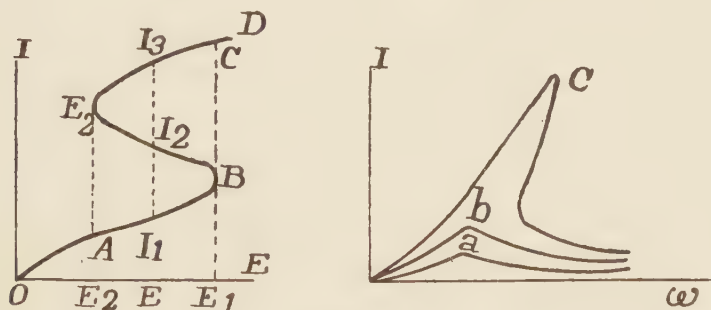


Fig. 19.

Ensuite, MARTIENSSEN fait une tentative pour prédéterminer les courbes de résonance. Les résultats sont aussi en bon accord avec l'expérience. Les simplifications sont de même caractère, le raisonnement étant conduit comme si les courants étaient sinusoïdaux. Le résultat, dans certains cas, est représenté sur la figure 19 et l'on constate la possibilité d'existence de trois courbes de résonance. De plus, la caractéristique du système représenté sur la même figure a une « partie tombante ».

(1) Voir la bibliographie.

Un autre point intéressant dans son raisonnement est qu'on peut obtenir, à l'enclenchement, soit un courant I^1 , soit I^3 , suivant la phase de la force électromotrice à la fermeture, et qu'une surtension momentanée fait passer le courant I^1 à I^3 . La ressemblance de notre raisonnement sur le fonctionnement du schéma utilisé par nous est que la caractéristique représente une fonction à plus d'une détermination, et que le passage d'une détermination à l'autre se fait dans les conditions appropriées de phase. Les expériences de plusieurs auteurs, dont M. ROUELLE, ont confirmé qualitativement la théorie.

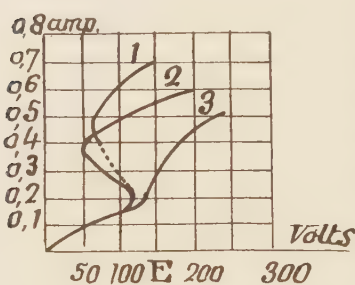


Fig. 20.

La figure 20 représente en 1 la caractéristique I en fonction de E , relevée expérimentalement (la partie instable étant très ponctuée) et en 2 la caractéristique calculée; la courbe 3 a été relevée en disposant une grande résistance en série avec le circuit et montre que celle-ci a pour effet de supprimer la possibilité du double régime de courant.

Nous pouvons observer que cette résistance diminue en outre les déphasages possibles.

D'autres auteurs, par exemple M. BOUCHEROT (¹), ont également observé, au moyen de l'ondographe, le résultat de MARTIENSSEN. De plus, M. BOUCHEROT a trouvé que, dans certains cas, le courant faible est déphasé en arrière de la tension, tandis que le courant fort l'est en avant.

La conclusion que nous en tirons est que, dans le cas de ferro-résonance, la fonction déterminant le courant a plus d'une détermination et que, dans le cas où, au point critique, les conditions de phase sont convenables, le passage d'une détermination à l'autre est possible et qu'alors on observe la démultiplication de la fréquence. Cette conclusion repose sur les observations expérimentales de plusieurs auteurs que nous avons cités, et est conforme au raisonnement que nous avons adopté dans ce travail.

Une autre confirmation de ce raisonnement est que l'apparition de sous-multiples dans le cas de ferro-résonance ne peut se faire que dans des conditions particulières.

De plus, on constate, en étudiant les oscillogrammes que, dans

la région où les deux courants sont possibles, l'intensité du courant est celle qui correspond à la ferro-résonance normale, mais ce courant est tantôt celui qui répond au courant fort, tantôt celui qui répond au courant faible. Il y a bien, par conséquent, le passage d'une branche de la caractéristique à l'autre.

M. ROUELLE indique que, dans aucune expérience où la démultiplication de la fréquence a lieu, il n'a été possible d'obtenir un courant qui corresponde au régime de forte intensité seul. Ceci s'explique bien par notre raisonnement.

La théorie existante se trouve en défaut pour expliquer ce phénomène, et l'étude oscillographique seule a permis à M. ROUELLE d'identifier de façon certaine l'ordre des démultiplications réalisées.

Au point de vue d'application à la basse fréquence, le démultiplicateur à ferro-résonance nous paraît utilisable aussi bien que le nôtre mais, lorsqu'il s'agit de fréquences élevées, la présence du fer élimine son application. Ceci est surtout vrai en cas d'ondes courtes.

En terminant, signalons encore une analogie entre le montage à ferro-résonance et celui que nous avons étudié. La caractéristique « tombante » observée dans le cas de ferro-résonance existe aussi dans le cas où, dans un autre montage, on considère la caractéristique d'une seule des lampes en faisant varier son potentiel-grille. En effet, notre montage équivaut à un amplificateur de courant continu à réaction, cette réaction étant réalisée par le couplage de l'anode de la deuxième lampe avec la grille de la première.

Or, il est connu que, dans ce genre d'amplificateur, si la résistance de couplage est suffisamment élevée, on obtient une caractéristique « tombante ».

CONCLUSION

En conclusion, nous avons étudié la possibilité de démultiplier la fréquence, particulièrement celle d'une tension électrique alternative, sans employer d'oscillateur auto-entretenu.

Nous avons construit un dispositif démontrant expérimentalement cette possibilité.

Nous avons, en outre, étudié son application à des courants de haute fréquence et envisagé quelques cas où son utilisation industrielle peut être utile. Ces cas se résument surtout à la mesure précise de fréquences élevées et à la stabilisation des émetteurs à fréquence variable, par des lignes concentriques qui ne soient pas trop encombrantes.



BIBLIOGRAPHIE

Démultiplication de la fréquence par des oscillateurs auto-entretenus.

- E. V. APPLETON. — « Automatic synchronization of triode oscillators », *Proc. Camb. Phil. Soc.*, vol 3 (1922).
I. KOGA. — « A new frequency transformer or frequency changer », *Proc. I. R. E.*, vol. 15, pp. 669-673, August (1927).
B. VAN DER POL. — *Proc. I. R. E.*, Septembre 1934.
A. LIÉNARD. — *Revue Générale de l'Electricité*, vol. 25, pp. 901-946 (1928).
J. GROSZKOWSKI. — « Frequency division », *Proc. I. R. E.*, vol. 18 pp. 1960-1970, Novembre (1930).
Longo. — « Onde électrique » (1934).
H. STERKY. — *Proc. I. R. E.*, vol. 25, pp. 1153-1175, Sept. (1937).
ROCARD. — *Bull. Soc. Fse d'Electricité* (1937).

Son rauque des hauts-parleurs.

- VON SCHMOLLER. — *Telefunkenzt.* Juin (1934).
PEDERSEN. — *The Journal of the Acoust. Soc. of Amer.*, Avril (1935).

Ferro-résonance

- J. BERTHENOD. — *L'Eclairage électrique*, 30 Novembre (1907) t. LIII, p. 289-296.
O. MARTIENSSEN. — *Physikalische Zeitschrift*, 15 mai (1910) t. XI, p. 446-460.
H. STARKE. — *Physikalische Zeitschrift*, 1^{er} Janvier (1917) t. XVIII, p. 6-18.
P. BOUCHEROT. — *Comptes rendus*, 22 mars 1920, t. CLXX, p. 725-728.
P. BOUCHEROT. — *Rev. Gle Électricité*, 11 Déc. 1920, t. VIII, p. 927-828.
F. MARGAND. — *Rev. Gle Électricité*, 7 mai 1921, t. IX, p. 635-637.
KURT HEEGNER. — *Loc. cit.*
Jean FALLOU et A. MAUDUIT. — *Comptes rendus*, 1^{er} février (1926) t. CLXXXII, p. 312-313.
E. ROUELLE. — *Comptes rendus*, 19 Décembre (1927), t. CLXXXV, p. 1450-1452.
E. ROUELLE. — *Comptes rendus*, 23 janvier (1928), t. CLXXXVI, p. 224-226.
E. ROUELLE. — *Rev. Gle Électricité*, 24 Novembre (1934), t. XXXVI, p. 715-738, 1^{er} Décembre (1934), p. 763-780, 8 Décembre (1934), p. 795-819, 15 Décembre (1934), p. 841-858.

DEUXIÈME THÈSE

Propositions données par la Faculté

OSCILLATIONS DE RELAXATION ÉLECTRIQUES

VU ET APPROUVÉ :

Paris, le 14 juillet 1939.

Le Doyen de la Faculté des Sciences

CH. MAURAIN

VU ET PERMIS D'IMPRIMER :

Le Recteur de l'Académie de Paris

G. ROUSSY

